Преподаватель:
Прутков Козьма Петрович

Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Домашняя контрольная работа

Теория игр

Студент: **Иксов Игрек Зетович**

Екатеринбург
2017-2018

PrutkovKP@ugaga.hihi

Указания к оформлению работы

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 11 или `DC`.

В программе Adobe Reader переход в полноэкранный режим и возвращение к режиму работы в окне осуществляется комбинацией клавиш `Ctrl+L` (т.е. одновременным нажатием клавиш «`Ctrl`» и «`L`»).

Переход к следующему слайду или возвращение к предыдущему слайду осуществляется клавишами «`Page Up`» или «`Page Down`».

Указания к оформлению работы

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 11 или `DC`.

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука).

«Откат», т. е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш `Alt` и $\leftarrow$.

В случае, если два соседних слова выделены, допустим, синим цветом, но одно набрано обычным, а другое — полужирным шрифтом, то это означает, что переход по гиперссылкам осуществляется на различные мишени.

Указания к оформлению работы

1) Тестирование начинается с нажатия кнопки «Начать тест», подсчёт баллов произойдёт после нажатия кнопки «Завершить тест». При возникновении затруднений с выполнением задания перейдите по гиперссылкам в тексте задания, для чего в папке, куда вы извлекли данный файл с заданиями, должны находиться также содержащиеся в этом же архиве файлы с электронными учебниками.

2) В заданиях необходимо заполнить все поля для ввода вида ☐. Выполненный тест следует сохранить (необходим `Adobe Reader XI` или более высокой версии) и выслать по `e-mail` `PrutkovKP@ugaga.hihi`

3) Чтобы нарисовать фигуру в `Adobe Reader 11`, надо на верхней панели открыть меню «`Просмотр`», выбрать пункт «`Инструменты`», вкладку «`Комментарии`», и во вкладке «`Рисованные пометки`», активировать нужный инструмент.

В `Adobe Reader DC` для рисования линий следует активизировать пункт «`Добавить комментарий`» (например, на верхней панели в меню «Редактирование» выбрать «Инструменты управления» и открыть «Добавить комментарий»). В строке «`Записка Выделение цветом Подчёркнутый Текст комментария Зачеркнутый Заменить текст ...`» выбрать троеточие. В «вывалившемся» списке следует выбрать пункт «Инструменты рисования», а в нем — пункт «Линия».

4) В поле для ввода $\square$ вводится либо **формула** (если это явно указано), либо ***целое число***. Для введения дробей используется сдвоенное поле ввода: $\dfrac{\square}{\square}$. Дроби должны быть несократимыми, но могут быть неправильными. Если дробь оказалась целым числом n, представить его в виде $\dfrac{n}{1}$. Если числитель нулевой, дробь надо представить в виде $\dfrac{0}{1}$. Если дробь отрицательная, то знак «минус» должен быть в числителе: $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b}$. В натуральном числе под корнем $\sqrt{}$ нельзя выделить множитель, являющийся квадратом натурального числа.

5) Если в поле для ввода надо ввести целое число, то вместо него можно вводить арифметическое выражение в формате `Java Script`, т.е., например, вместо 8 можно ввести `(3^2)-1` или `sqrt(64)`.

6) **При вводе формулы** в полях для ввода знак умножения * писать обязательно, деление обозначается как /, возведение в степень – как ^ (например, x^{5t-3} записывается как `x^(5*t-3)`), $\sqrt{\ldots}$ задаётся как `sqrt(...)` (например, $\sqrt{x+1}$ можно представить как `sqrt(x+1)` и $\sqrt{|t|}$ — как `sqrt(|t|)`), $\ln\ldots$ задается как `ln(...)` (например, $\ln x$ надо записать `ln(x)`), $\lg\ldots$ как `log(...)`.
$e^{\cdots}$, $\sin\ldots$, $\cos\ldots$, $\mathrm{tg}\ldots$ — как `exp(...)`, `sin(...)`, `cos(...)`, `tan(...)`, $\arcsin\ldots$, $\arccos\ldots$, $\mathrm{arctg}\ldots$ — как `asin(...)`, `acos(...)`, `atan(...)`.
Понятно, что, например, $\sin^3 t$ надо представить выражением `((sin(t))^3)` или `(sin(t))^3`, или даже `sin(t)^3`, но не `sin^3(t)`.

Для простоты полагаем $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ и т.п. Число π — это `PI`.

Приоритетность операций можно изменить с помощью КРУГЛЫХ скобок, все скобки должны быть парными (каждой окрывающейся скобке соответствует закрывающаяся). Использовать можно только круглые скобки. Выражение можно заменить равносильным: вместо `5^2` ввести `25`, `2*(x-8)` заменить на `2*x-16`. Лишние пары скобок игнорируются: `(x*(1))` равносильно `x*1` и даже `x`.

Знак $\Rightarrow$ вводится как $=>$, $\Leftrightarrow$ — как $<=>$. При вводе формул с использованием этих знаков нельзя вставлять пробелы, лишние скобки и знаки препинания.

Считаем, что сумма может состоять из одного слагаемого.

Оглавление

Краткие сведения из теории игр

Михаил Давидович Локшин

Михаил Дмитриевич Боярский

1. Основы теории игр

В математической теории игр рассматриваются задачи, связанные с принятием решений в ситуациях с несколькими участниками. Этих участников в теории игр обычно называют *игроками*. Каждый игрок при выборе того или иного варианта действий руководствуется собственной целевой функцией, значения которой определяют его выигрыш или проигрыш. При этом значения целевой функции у каждого игрока зависят также от решений, принимаемых остальными участниками. Возможные действия участников (игроков) называют *стратегиями*. Предполагается, что каждый из игроков знает не только множество своих стратегий и собственную целевую функцию, которую иначе называют *функцией выигрыша*, но также обладает полной и точной информацией о стратегиях и функциях выигрыша всех остальных игроков. Таким образом, целевые функции и множества стратегий, доступных каждому из игроков, общеизвестны. В соответствии с этой информацией каждый игрок организует свое поведение и действия. Далее рассмотрим игры двух лиц.

Пусть имеются два игрока: игрок I и игрок II. Множество X - – это множество всех допустимых стратегий (действий) игрока I, а множество Y – допустимых множество всех допустимых стратегий (действий) игрока II. Пусть эти множества конечны, т.е. $X = \{X_1, X_2, ..., X_m\}, Y = \{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$. В случае, если игрок I выбирает стратегию $X_i \in X(i = 1, ..., m)$, а игрок II – стратегию $Y_j \in Y(j = 1, ..., n)$, то возникает ситуация $(X_i, Y_j) = \omega_{ij} \in \Omega$, где Ω есть множество возможных исходов игры. Для сокращения записей обычно отождествляют стратегии игроков с их номерами, т.е. полагают $X = \{1, ..., m\}, Y = \{1, ..., n\}, \omega = (i, j)$. Для оценки исходов игры задаются целевые функции каждого игрока, которые принято называть *функциями выигрыша* (иногда используют термин «функция потерь»). Пусть a_{ij} есть выигрыш игрока I в ситуации ω_{ij}, а b_{ij} – выигрыш игрока II. Таким образом, имеются две матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1\,j} & ... & a_{1\,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i\,1} & ... & a_{i\,j} & ... & a_{i\,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m\,1} & ... & a_{m\,j} & ... & a_{m\,n} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} b_{11} & ... & b_{1\,j} & ... & b_{1\,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{i\,1} & ... & b_{i\,j} & ... & b_{i\,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{m\,1} & ... & b_{m\,j} & ... & b_{m\,n} \end{bmatrix}.$$

Элементы этих матриц интерпретируются, очевидно, следующим образом: a_{ij} есть выигрыш игрока I в том случае, когда он выбирает свою i-ю стратегию, а игрок II свою j-ю стратегию; b_{ij} есть выигрыш игрока II в той же ситуации. Отметим, что если у какого-либо игрока в некоторой ситуации «выигрыш» окажется отрицательным числом, то, говорят о «проигрыше». Матрицы и называются *матрицами выигрыша*, или *платежными матрицами*, а игра называется *биматричной игрой*.

В простейшем случае $B = -A$. Это означает, что выигрыш игрока II в любой ситуации равен по величине и противоположен по знаку выигрышу игрока I в той же ситуации:

$$b_{ij} = -a_{ij}, \text{ т.е. } a_{ij} + b_{ij} = 0 \text{ для всех } i = 1, \ldots, m \text{ и } j = 1, \ldots, n.$$

Учитывая, что в этом случае матрица фактически не нужна, мы имеем игру с одной лишь матрицей , или матричную игру. Далее мы будем говорить, что в ситуации ω_{ij} игрок I имеет выигрыш a_{ij}, а игрок II имеет проигрыш a_{ij}.

Игра с постоянной (необязательно нулевой) суммой $(a_{ij} + b_{ij} = c)$ очевидно сводится к матричной игре с матрицей $A' = ||a'_{ij}|| = ||a'_{ij} - c||$. Иногда матричной называют именно такую игру, поскольку для ее задания достаточно одной матрицы.

Матричная игра по своей сути является *антагонистической игрой*, или *игрой с нулевой суммой*. Термин «матричная игра» относится к играм с конечным числом стратегий, в то время как термин «антагонистическая игра» можно распространить и на игры с бесконечным числом стратегий.

2. Основные понятия матричных игр

Проанализируем, какие стратегии целесообразно выбирать игрокам в матричной игре. Примем за основу *гипотезу крайней осторожности — гипотезу антагонизма:* «при выборе стратегии надо рассчитывать на самый худший возможный вариант». Как в этом случае можно оценить ту или иную стратегию?

Встанем на позицию игрока I. Выбрав свою i-ю стратегию, игрок I может получить в зависимости от выбора игрока II один из возможных выигрышей $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$. В худшем случае игрок I получит выигрыш

$$\underline{a}_i = \min_{j\,=\,1,\ldots,\,n} a_{ij}.$$

Число $\underline{a}_i$ называется *гарантированным результатом — наименьшим возможным выигрышем игрока I при выборе им i-ой стратегии.* С содержательной точки зрения гарантированный результат представляет собой следующее: выбравi-ю стратегию, игрок I получит выигрыш никак не меньший чем $\underline{a}_i$, как бы ни осуществил выбор своей стратегии игрок II. Далее игрок I рассуждает следующим образом: надо выбрать такую стратегию i, при которой гарантированный выигрыш $\underline{a_i}$ будет наибольшим. Наибольший гарантированный выигрыш игрока I будет

$$\underline{a} = \max_{i=1,\dots,m} \underline{a}_i = \max_{i=1,\dots,m} \min_{j=1,\dots,n} a_{ij} .$$

Число $\underline{a}$ называется *наибольшим гарантированным результатом (выигрышем) игрока I в игре*. С содержательной точки зрения выигрыш — это наибольшее из того, что можно гарантировать себе игрок I вне зависимости от поведения игрока II. Разумеется, реально может возникнуть ситуация, при которой игрок I выиграет больше чем $\underline{a}$. Стратегия i_0, на которой достигается $\underline{a} = \max\limits_{i=1,\dots,m} a_{ij}$, называется максиминной стратегией игрока I. Следуя максиминной стратегии, игрок I всегда получает выигрыш, который не меньше наибольшего выигрыша из тех, которые могут быть достигнуты им в наихудших условиях.

Проведем аналогичные рассуждения за игрока II. В качестве оценки j-ой стратегии игрока II выступает его максимальный возможный проигрыш при использовании им j-ой стратегии, т.е. *гарантированный результат игрока II при использовании им j-ой стратегии* равен

$$\bar{a}_j = \max_{i=1,\ldots,m} a_{ij}.$$

Содержательно: выбрав j-ю стратегию, игрок II в худшем для себя случае получит проигрыш никак не больше чем $\bar{a}_j$, как бы ни осуществил выбор своей стратегии игрок I. Игрок II заинтересован выбрать такую стратегию, чтобы этот максимальный возможный проигрыш был наименьшим, т.е. игроку II надо выбрать такую стратегию j, для которой максимальный возможный проигрыш $\bar{a}_j$ будет наименьшим. *Наилучший гарантированный результат (наименьший из максимально возможных проигрышей) игрока II в игре* определяется величиной

$$\bar{a} = \min_{j\,=\,1,\ldots,\,n} \bar{a}_j = \min_{j\,=\,1,\ldots,\,n} \quad \max_{i\,=\,1,\ldots,\,m} a_{ij} \ .$$

Стратегия j_0, на которой достигается $\bar{a} = \min\limits_{j\,=\,1,\ldots,\,n} \bar{a}_j$, называется *минимаксной стратегией игрока II.*

Пример 1. Рассмотрим игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Найдем максиминные и минимаксные стратегии игроков I и II соответственно. Имеем:

$$\underline{a}_1 = \min_{j\,=1,2,3} a_{1j} = \min \{a_{11}, a_{12}, a_{13}\ \} = \min\{1;\ 9;\ 3\} = 1,$$

$\underline{a}_2 = 3$ (наименьший элемент во второй строке), $\underline{a}_3 = 2$. Находим

$$\underline{a} = \max_{i\,=1,2,3} \underline{a}_i = \max \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\ \} = \underline{a}_2 = 3.$$

Таким образом, наибольший гарантированный выигрыш игрока I в игре равен 3 и максиминной является его вторая стратегия.
Далее имеем для игрока II:

$$\bar{a}_1 = \max_{i=1,2,3} a_{i1} = \max\{a_{11}, a_{21}, a_{31}\} = \max\{1;\ 5;\ 4\} = 5,$$

$\bar{a}_2 = 9$ (наибольший элемент во втором столбце), $\bar{a}_3 = 8$. Находим

$$\bar{a} = \min\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\} = \min\{5;\ 9;\ 8\} = 5.$$

Таким образом, наименьший среди максимально возможных проигрышей игрока II в игре равен 5 и минимаксной является его первая стратегия.

3. Решение матричных игр в чистых стратегиях

Принцип оптимальности в антагонистической игре заключается в следующем: ситуация в игре является оптимальной, если от нее ни одному из игроков невыгодно отклоняться. Определенная таким способом оптимальная ситуация называется *равновесной ситуацией*, а принцип оптимальности, основанный на построении равновесной ситуации, — принципом равновесия.

В матричной игре ситуация $(i^*; j^*)$ называется *ситуацией равновесия*, или *седловой точкой*, если

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

для всех $i = 1, ..., m$ и $j = 1, ..., n$.

Левое неравенство означает, что элемент $a_{i^*j^*}$, соответствующий седловой точке, является наибольшим (максимумом) в своем j^* -м столбце; правое неравенство означает, что элемент $a_{i^*j^*}$ является наименьшим (минимумом) в своей i^*-й строке. Таким образом, платеж, соответствующий седловой точке, равноприемлем для обоих игроков.

Пример 1. Игра с матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

обладает седловой точкой (3;1).

Заметим, что седловых точек в матричной игре может быть более одной. Возникает вопрос, какая из этих точек «лучше»? Оказывается, что они «одинаковы» в силу следующей теоремы.

Теорема 1. Если $(i_1^*; j_1^*)$ и $(i_2^*; j_2^*)$ — произвольные седловые точки игры с матрицей $A = ||a_{ij}||$, то

1. $a_{i_1^* j_1^*} = a_{i_2^* j_2^*} = a_{i_1^* j_2^*} = a_{i_2^* j_1^*}$,
2. $(i_1^*; j_2^*)$ и $(i_2^*; j_1^*)$ — седловые точки.

Доказательство.

1. Из определения седловой точки для всех $i = 1, ..., m$ и $j = 1, ..., n$

имеем:
$$a_{ij_1^*} \le a_{i_1^* j_1^*} \le a_{i_1^* j}, \tag{1}$$
$$a_{ij_2^*} \le a_{i_2^* j_2^*} \le a_{i_2^* j}, \tag{2}$$

Подставим в левую часть неравенства (1) $i = i_2^*$, в правую $j = j_2^*$; затем в левую часть неравенства (2) $i = i_1^*$ и в правую $j = j_1^*$. Получим

$$a_{i_2^* j_1^*} \le a_{i_1^* j_1^*} \le a_{i_1^* j_2^*} \le a_{i_2^* j_2^*} \le a_{i_2^* j_1^*}.$$

Отсюда следуют равенства

$$a_{i_2^* j_1^*} = a_{i_1^* j_1^*} = a_{i_1^* j_2^*} = a_{i_2^* j_2^*}. \tag{3}$$

2. Из (1) — (3) имеем для всех $i = 1, ..., m$ и $j = 1, ..., n$.

$$a_{ij_1^*} \le a_{i_1^* j_1^*} = a_{i_2^* j_1^*} = a_{i_2^* j_2^*} \le a_{i_2^* j}, \text{ т.е. } a_{ij_1^*} \le a_{i_2^* j_1^*} \le a_{i_2^* j},$$

$$a_{ij_2^*} \le a_{i_2^* j_2^*} = a_{i_1^* j_2^*} = a_{i_1^* j_1^*} \le a_{i_1^* j}, \text{ т.е. } a_{ij_2^*} \le a_{i_1^* j_2^*} \le a_{i_1^* j},$$

что означает равновесность ситуаций $(i_1^*; j_2^*)$ и $(i_2^*; j_1^*)$. Теорема 1 доказана.

Из первого утверждения теоремы 1 следует, что функция выигрыша принимает одно и то же значение во всех ситуациях равновесия. Это общее для всех седловых точек значение называют*ценой игры (значением игры)*, а любую из пар равновесных стратегий — *решением игры.*

Из второго утверждения теоремы 1 вытекает возможность говорить не только о равновесных (оптимальных) парах стратегий, но и об *оптимальных стратегиях каждого игрока в отдельности*: если $(i^*; j^*)$ — седловая точка, то i^* называется *оптимальной стратегией игрока I*, а j^* — *оптимальной стратегией игрока II.*

Пример 2. Игра с матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

обладает седловыми точками (2;1), (2;3), (3;1), (3;3).

Множество

$$\{(i^*; j^*), \text{ где } i^* \text{ и } j^* \text{ — произвольные оптимальные стратегии игроков I и II соответственно}\}$$

исчерпывает все седловые точки (решения) игры.

Равенство (3) указывает на взаимозаменяемость оптимальных стратегий: пара любых оптимальных стратегий игроков образует ситуацию равновесия (оптимальную ситуацию) с одинаковым выигрышем (проигрышем), равным цене игры.

Теорема 2. Для произвольной матричной игры $\underline{a} \leq \bar{a}$.

Доказательство.

Для всех $i = 1, ..., m$ и $j = 1, ..., n$ имеем:

$$\underline{a}_i = \min_{j = 1,\dots,\, n} a_{ij} \le a_{ij} \qquad \bar{a}_j = \max_{i = 1,\dots,\, m} a_{ij} \ge a_{ij}.$$

Таким образом, $\underline{a}_i \le \bar{a}_j$. Ввиду произвольности i имеем

$$\max_{i = 1,\dots,\, m} \underline{a}_i \le \bar{a}_j.$$

Ввиду произвольности j имеем

$$\max_{i = 1,\dots,\, m} \underline{a}_i \le \min_{j = 1,\dots,\, n} \bar{a}_j.$$

т.е. $\underline{a} \le \bar{a}$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Для того чтобы в матричной игре существовала ситуация равновесия, необходимо и достаточно выполнение равенства $\underline{a} = \bar{a}$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $(i^*; j^*)$ — седловая точка. Докажем, что $\underline{a} = \bar{a}$.

Для всех $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$ выполняются неравенства

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}, \tag{4}$$

Значит,

$$\bar{a}_{j^*} = \max_{i\,=\,1,\ldots,\,m} a_{ij^*} = a_{i^*j^*}. \tag{5}$$

В то же время,

$$\min_{j\,=\,1,\ldots,\,n}\ \max_{i\,=\,1,\ldots,\,m} a_{ij} = \min_{j\,=\,1,\ldots,\,n} \bar{a}_j \le \bar{a}_{j^*} \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что

$$\min_{j\,=\,1,\ldots,\,n}\ \max_{i\,=\,1,\ldots,\,m} a_{ij} \le a_{i^*j^*},$$

т.е. $\bar{a} \le a_{i^*j^*}$. Далее из (4) имеем

$$\underline{a}_{i^*} = \min_{j\,=\,1,\ldots,\,n} a_{i^*j} = a_{i^*j^*} \le \max_{i\,=\,1,\ldots,\,m} \underline{a}_i = \max_{i\,=\,1,\ldots,\,m}\ \min_{j\,=\,1,\ldots,\,n} a_{ij}$$

откуда

$$\max_{i\,=\,1,\ldots,\,m}\ \min_{j\,=\,1,\ldots,\,n} a_{ij} \ge a_{i^*j^*}$$

т.е. $\underline{a} \ge a_{i^*j^*}$. В результате имеем $\bar{a} \le \underline{a}$. Но, в силу теоремы 2, $\bar{a} \ge \underline{a}$, так что $\bar{a} = \underline{a}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\bar{a} = \underline{a}$. Тогда

$$\max_{i=1,\dots,m} \min_{j=1,\dots,n} a_{ij} = \min_{j=1,\dots,n} a_{i^*j} \qquad \min_{j=1,\dots,n} \max_{i=1,\dots,m} a_{ij} = \max_{i=1,\dots,m} a_{ij^*}$$

Покажем, что ситуация $(i^*; j^*)$, на компонентах которой достигаются нижняя и верхняя цены игры соответственно, является равновесной. Имеем:

$$a_{i^*j^*} \geq \min_{j=1,\dots,n} a_{i^*j} = \underline{a} \qquad a_{i^*j^*} \leq \max_{i=1,\dots,m} a_{ij^*} = \bar{a} \tag{7}$$

Поскольку $\bar{a} = \underline{a}$, из (7) следует, что $\bar{a} = \underline{a} = a_{i^*j^*}$, и неравенства в (7) выполняются как равенства. В результате имеем:

$$a_{i^*j^*} = \min_{j=1,\dots,n} a_{i^*j} \leq a_{i^*j} \text{ и } a_{i^*j^*} = \max_{i=1,\dots,m} a_{ij^*} \geq a_{ij^*}$$

т.е. $a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$ для всех $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$. Теорема доказана.

В ходе доказательства необходимого условия установлено, что при наличии седловой точки нижняя и верхняя цены игры совпадают, и выполняются равенства

$$\min_{j=1,\dots,n} \max_{i=1,\dots,m} a_{ij} = \max_{i=1,\dots,m} a_{ij^*} = a_{i^*j^*},$$

$$\max_{i=1,\dots,m} \min_{j=1,\dots,n} a_{ij} = \min_{j=1,\dots,n} a_{i^*j} = a_{i^*j^*},$$

т.е. минимакс и максимин достигаются на оптимальных стратегиях j^* и i^* соответственно. В ходе доказательства достаточного условия установлено, что при равенстве нижней и верхней цен игры существует равновесная ситуация: она получается при использовании игроками I и II максиминной и минимаксной стратегий соответственно, причем эти стратегии являются оптимальными. Кроме того, показано, что общее значение $\underline{a}$ и $\bar{a}$ равно цене игры:

$$a = \underline{a} = \bar{a} = a_{i^*j^*}.$$

Неравенства (7) справедливы для любой игры (с ценой или без), так что имеем $\underline{a} \leq a_{i_0j_0} \leq \bar{a}$, где j_0 и i_0 – минимаксная и максиминная стратегии.

Игры, в которых существует ситуация равновесия (седловая точка), называются *вполне определенными.* Такие и только такие игры имеют цену. В силу теоремы 3 критерием полной определенности игры (существования цены) является равенство нижней и верхней цен.

Вернемся к разобранному примеру 1 с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Получили пару стратегий (2;1). Таким образом, исходя из гипотезы крайней осторожности игроку I рекомендуется придерживаться своей второй стратегии, а игроку II – своей первой стратегии. «Устроит» ли их такое поведение? Пусть игрок I придерживается рекомендуемой второй стратегии. В этом случае игроку II очевидно невыгодно придерживаться рекомендуемой первой стратегии: в этом случае он проигрывает 5, в то время как при выборе второй стратегии проигрыш составляет всего 3. Может быть, пара стратегий (2;2) «устроит» обоих? Оказывается, нет. Теперь уже игроку I выгодно отклониться от второй стратегии и заменить ее на первую, получив при этом выигрыш 9 вместо 3. Пара (1;2) не «устроит» игрока II, которому выгодно перейти к ситуации (1;1). Эта ситуация не «устроит» игрока I, которому выгодно перейти к ситуации (2;1), т.е. к исходной. Мы убедились, что выбор рекомендуемой ситуации (2;1) приводит к «бесконечному блужданию» по маршруту $(2;1) \to (2;2) \to (1;2) \to (1;1) \to (2;1) \to \ldots$. Таким образом, при «обоснованности и разумности» рекомендаций игрокам «по отдельности» совместные действия «обоснованными и разумными» не являются. Оказывается, что в случаях, аналогичных нашему примеру, вообще не существует никаких «разумных и обоснованных» рекомендаций, указывающих пару стратегий, которая всех «устроит». В этом примере нет ситуации равновесия, как мы убедимся далее.

Если отсутствует ситуация равновесия, то не существует пары оптимальных стратегий игроков, от которых им невыгодно отклоняться. Игрокам бывает невыгодно придерживаться максиминной и минимаксной стратегий, так как они могут получить больший выигрыш. Однако сообщение о выборе стратегии противнику может привести к еще большим потерям, чем в случае максиминной или минимаксной стратегии. Так в игре с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

будет $\underline{a} = 3, \bar{a} = 5$, и ситуации равновесия не существует. Обозначим через $\bar{i}$ максиминную стратегию игрока I ($\bar{i} = 1$), через $\bar{j}$ – минимаксную стратегию игрока II ($\bar{j} = 2$). Предположим, что игрок II придерживается минимаксной стратегии $\bar{j}$, а игрок I выберет стратегию $i = 2$. Тогда игрок I получит выигрыш 5, больший чем $\underline{a} = 3$. Однако, если игрок II догадается о выборе игрока I, то он изменит стратегию на $j = 1$, и тогда первый получит выигрыш лишь 2, т.е.

меньше $\underline{a} = 3$. Аналогичные рассуждения можно провести также и для игрока II.

Оказывается, что игрокам разумно не пытаться выбрать какую-то конкретную стратегию, а действовать случайно, что обеспечивает наибольшую скрытность выбора стратегии. Результат выбора не может стать известным противнику, поскольку до реализации случайного механизма не известен самому игроку.

Перейти к пособию по биматричным играм?

Теория игр: тест 1 (Иксов Игрек Зетович)

Начать тест

1. (2 б.) Верхняя цена игры с платёжной матрицей $\begin{pmatrix} 20 & 20 \\ -15 & 18 \end{pmatrix}$, равна ☐, а нижняя цена этой игры равна ☐. `STestMathGames[21]`

2. (6 б.) Для биматричной игры с матрицей выигрышей $\begin{pmatrix} (-1,-9) & (-7,-5) \\ (-7,-6) & (-4,-9) \end{pmatrix}$ отметить «галочкой» (щелкнуть левой кнопкой мыши на всех нужных полях для ввода) все равновесия в чистых стратегиях.

☐ X_1Y_1 ☐ X_1Y_2 ☐ X_2Y_1 ☐ X_2Y_2 ☐ нет

`STestMathGames[31]`

Завершить тест ☐ ☐

за задачи за коэфф-ты

Теория игр: тест 2 (Иксов Игрек Зетович)

Начать тест

1. (2 б.) Верхняя цена игры с платёжной матрицей $\begin{pmatrix} -18 & -12 \\ -18 & -19 \end{pmatrix}$, равна $\square$, а нижняя цена этой игры равна $\square$. STestMathGames[21]

2. (6 б.) Для биматричной игры с матрицей выигрышей $\begin{pmatrix} (-3,-4) & (4,-1) \\ (1,-4) & (-3,-2) \end{pmatrix}$ отметить «галочкой» (щелкнуть левой кнопкой мыши на всех нужных полях для ввода) все равновесия в чистых стратегиях.

$\square$ X_1Y_1 $\square$ X_1Y_2 $\square$ X_2Y_1 $\square$ X_2Y_2 $\square$ нет

STestMathGames[32]

Завершить тест $\underbrace{\boxed{}}_{\text{за задачи}}\underbrace{\boxed{}}_{\text{за коэфф-ты}}$

Теория игр: тест 3 (Иксов Игрек Зетович)

Начать тест

1. (1 б.) В матрице доминируемая строка имеет номер $\square$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & -1 \\ -6 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

STestMathGames[36]

2. (1 б.) В матрице доминируемая строка имеет номер $\square$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 11 \\ 5 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

STestMathGames[36]

3. (2 б.) Верхняя цена игры с платёжной матрицей $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, равна $\square$, а нижняя цена этой игры равна $\square$. STestMathGames[21]

Завершить тест $\underbrace{\boxed{}}_{\text{за задачи}}\underbrace{\boxed{}}_{\text{за коэфф-ты}}$

Выполненный тест следует сохранить (необходим `Adobe Reader XI` или более высокой версии) и выслать по `e-mail` PrutkovKP@ugaga.hihi